

REFLEXIÓN Y APRENDIZAJE MATEMÁTICO

María Virginia Rapetti
CIAFIC-CONICET

Entre los elementos que facilitan al alumno la tarea de aprender, se analiza el papel de la reflexión tanto de los propios procesos cognoscitivos (*metacognición*) como de problemas ya resueltos (*worked-out examples*). Las investigaciones muestran las posibilidades e intentos de aplicar este recurso a la enseñanza.

Palabras clave: reflexión - metacognición - aprendizaje de la matemática - estrategias de aprendizaje

El presente trabajo intenta analizar algunos elementos metodológicos que faciliten y mejoren el aprendizaje matemático y permitan alcanzar la formación de lo que se ha dado en llamar un “estudiante estratégico”, es decir aquel que ha aprendido a examinar y controlar sus propios procesos de aprendizaje. Para ello, consideramos la noción de reflexión bajo dos aspectos, la reflexión sobre: a) la acción y el conocimiento propios, es decir la *metacognición*, y b) un conocimiento no propio encarnado en la estrategia llamada *worked-out example*, que consiste en el estudio de problemas o ejemplos ya resueltos.

La metacognición

La metacognición, “equivalente funcional de la reflexión” (Vázquez, 1996: 116), fue definida por John Flavell (1978) como conocimiento que toma como su objeto o que regula cualquier aspecto de cualquier tarea cognitiva. En esta expresión están incluidos dos tipos de actividades: las de conocimiento acerca del conocimiento y las de la regulación del conocimiento. Referidas al proceso de aprendizaje estas dos actividades pueden ejemplificarse en la conciencia de aquello que debe hacerse y de cómo se está haciendo y el control

de lo que puede facilitar o entorpecer el aprendizaje; por ejemplo, la conciencia del fin y de los medios, el control de los resultados y de los factores motivacionales, afectivos (como miedo a equivocarse, vergüenza, etc.) y ambientales (ruido, falta de comodidad, etc.).

En la clasificación de las estrategias de aprendizaje se asumen dichas dimensiones; por ejemplo, Anthony (1994), basándose en distintos autores, para la clase de matemática propone la siguiente clasificación de las estrategias en:

- *cognoscitivas*, para efectivizar los progresos cognoscitivos: para adquirir, retener y recuperar distintas clases de conocimiento y de desempeño; por ej.: practicar, asociar ideas, tomar notas, imaginar, comparar (la respuesta con otras soluciones), generar preguntas, organizar, etc.

- *metacognitivas*, para controlar y regular el proceso de aprendizaje: refieren a la conciencia y conocimiento de los procesos del aprendizaje individual, como también a la tendencia y habilidad para controlar este proceso durante el aprendizaje; ej.: previsión, planificación, predicción, identificación del problema, atención selectiva, automonitoreo (monitoreo de la comprensión de lo presentado por el maestro y monitoreo del propio desempeño durante el ejercicio), evaluación, revisión, etc.

- *afectivas*, para controlar los factores afectivos y volitivos, como el esfuerzo, alentarse a sí mismo, etc.

- *manejo o administración de recursos*, que afectan indirectamente los

resultados del aprendizaje, tales como cambiar el propio ambiente, la tarea o pedir ayuda.

Se ha comprobado empíricamente que la metacognición influye en la transferencia de conocimientos y habilidades a otros contextos y en la durabilidad del conocimiento adquirido. El alumno reflexivo tiene más probabilidades de: identificar el uso y propósito del material aprendido; manejarlo de distinta manera; explorar su uso potencial bajo distintas circunstancias y utilizarlo por más tiempo (Georghiades, 2000).

Si bien la metacognición ha sido relacionada con un número de habilidades cognoscitivas (lectura, matemática y memoria), su distinción de la aptitud general del individuo no es clara. Swanson (1990) estudió el papel de metacognición y aptitud general en varias mediciones de resolución de problemas específicos en las que encontró que resultaron independientes. Se trata de un importante resultado pues permitiría a los sujetos con baja aptitud compensar su desempeño con altos niveles de metacognición. Cardelle-Elawar (1992), por su parte, mostró que alumnos con un nivel bajo en la solución de problemas muestran potencial metacognitivo cuando se los estimula con una instrucción explícita.

En los estudios más recientes, se han vinculado los efectos de la metacognición con las creencias motivacionales en el aprendizaje; en este caso se prefiere hablar de *aprendizaje autorregulado* (Boekaerts, 1999) y se conceptualiza al alumno

autorregulado como participante activo metacognitiva, motivacional y conductualmente. En términos de procesos metacognitivos, es un estudiante que planea, establece metas, se automonitorea y autoevalúa en varios puntos durante el proceso de adquisición del propio aprendizaje. En términos de procesos motivacionales, se caracteriza por elevada autoeficiencia, autoatribuciones positivas e interés intrínseco por la tarea.

El uso creciente de la metacognición para mejorar el aprendizaje en distintas áreas puede observarse en la implementación de programas educativos, tales como: POI (*Process-oriented Instruction*, Holanda; Vermunt, 1999); PEEL (*Project Enhanced Effective Learning*, Australia, Georghiades, 2000); CASE (*Cognitive Acceleration through Science Education*, Reino Unido; Georghiades, 2000); OMECOL (*Orientación Metacognitiva de la Comprensión Lectora*, España; Repetto Talavera, 1997).

En el área matemática, la metacognición se vincula a la resolución de problemas. Los primeros trabajos de Polya de 1957, por ejemplo, enfatizaron el planeamiento, el automonitoreo y la reflexión. Los objetivos propuestos en el documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (National Council of Teachers of Mathematics, 1989) incluyen la habilidad para: reflexionar y clarificar el pensamiento sobre las relaciones matemáticas; monitorear y reflexionar sobre el propio pensamiento y

desempeño; juzgar los méritos relativos de los procedimientos alternativos; justificar los pasos de un procedimiento.

Entre los métodos efectivos para suscitar la reflexión se señalan la solución de problemas en pares -los compañeros se turnan en el rol de "el que resuelve" y "el que escucha", verbalizan lo que están pensando y explican sus estrategias- (Lochhead, 1985) y la presentación de paradojas para suscitar conflictos y estrategias metacognitivas (Movshovitz-Hadar y Hadas, (1991).

Kramarski y Mevarech (1997) emplean una estrategia metacognitiva (SOLVE) que ayuda a los alumnos a prestar atención a sus procesos de resolución de problemas promoviendo la habilidad para construir gráficos en lenguaje Logo. La sigla indica los pasos de resolución de problemas sugeridos por Polya: *Systematic analysis* (análisis), *Overall planning* (planificación), *Linking together* (integración), *Verification* (verificación del resultado esperado) y *Evaluation* (evaluación). También implementaron un ejemplo de instrucción metacognitiva -IMPROVE- (Mevarech y Kramarski, 1997), que enfatiza el discurso reflexivo permitiendo al alumno implicarse en el razonamiento matemático a través de preguntas metacognitivas.

Podemos ver un modelo de enseñanza en las intervenciones sobre el grupo experimental (que es el que recibe el tratamiento) en investigaciones sobre metacognición:

- King (1991) proporciona una lista de preguntas referidas a la *planificación* (¿cuál es el problema?, ¿qué sabemos del problema?, ¿qué información se nos da?, ¿cuál es nuestro plan?, ¿hay otro modo de hacerlo?, ¿qué sucedería si...?, ¿qué debemos hacer después?); al *monitoreo* (¿estamos usando nuestro plan o estrategia?, ¿necesitamos uno nuevo?, ¿cambió nuestra meta?, ¿estamos en la ruta correcta?, ¿estamos cerca de la meta?) y a la *evaluación* (¿qué funcionó?, ¿qué no funcionó?, ¿qué deberíamos hacer la próxima vez?).

- Gargallo López y Puig Moratal (1997) proponen técnicas motivadoras, de modelado (hecho por el experto), planteamiento de preguntas (método socrático), introspección (análisis y discusión metacognitiva, verbalización de los procesos cognoscitivos) y autoinstrucciones.

- Mevarech (1999) presenta preguntas organizadas según los cuatro pasos de un modelo de resolución de problemas (orientación e identificación del problema, organización, ejecución y evaluación), diseñadas para ayudar al alumno a tomar conciencia del proceso y a monitorear su progreso. Usa tres tipos de interrogantes: de *comprensión* (¿cuál es el problema?, ¿en qué se parece y diferencia del anterior?), que lo orientan a articular los elementos principales del problema (describelo con tus propias palabras sin usar números), a clasificar el problema, a identificar lo que se conoce y lo que no; *estratégica* (¿qué estrategias son necesarias para

resolverlo?) y de *conexión*, referidas a las semejanzas y diferencias entre el problema por resolver y otros anteriormente resueltos.

Estudio de ejemplos

El *worked-out example* merece una consideración especial; consiste en el estudio de ejemplos resueltos y su éxito depende del grado de explicación de las razones de la solución del mismo, a medida que se estudia. Incluyen el enunciado de un problema y un procedimiento para resolverlo; generalmente, presentan la solución paso a paso y en muchos casos incluyen representaciones auxiliares como diagramas. El alumno tiene así un modelo de resolución de problema para estudiar e imitar y puede luego aplicar, analógicamente, el conocimiento adquirido a otro tipo de problema.

Los factores que pueden influir en la eficacia del método son: el modo en que los ejemplos están diseñados (la información debe presentarse en forma integrada para no provocar una sobrecarga cognitiva) y la relación entre ejemplos múltiples y práctica, es decir cómo se secuencian, su cantidad y combinación con la práctica.

La medida en que el alumno aprovecha de este estudio depende del llamado *self-explanation effect*, de cómo se explican las razones de la solución (Chi, Bassok, Reimann y Glaser, 1989): los alumnos exitosos identifican con claridad cuando com-

prenden el problema, mientras que los menos exitosos tienen con frecuencia "ilusiones de comprensión".

Cuando se aprende matemática, aparecen diferencias individuales en la autoexplicación. Renkl (1999) señala que los buenos alumnos asignan significado a los operadores al identificar los principios subyacentes (*principle-base explanations*) y anticipan el paso siguiente de la solución en vez de buscarlo; los no exitosos, en cambio, son pasivos y superficiales en el momento de dar la explicación y asignan poco tiempo al estudio de los ejemplos.

El aprendizaje con ejemplos resueltos tiene dos inconvenientes íntimamente relacionados con la metacognición: por un lado, como señaláramos, los alumnos tienen sentimientos ilusorios de comprensión porque los ejemplos no requieren *feedback* externo (datos de una fuente exterior) ni interno (fracaso al resolver); por otro, muchos parecen no tener (o no usar) metaconocimiento respecto de cómo trabajar con los ejemplos, los miran pero no los elaboran.

Dadas estas limitaciones, es importante una intervención docente que favorezca las actividades de autoexplicación para mejorar el aprendizaje. Atkinson, Sharon, Renkl y Wortham (2000), en su revisión de las investigaciones sobre el tema, distingue los siguientes métodos:

- Manipulaciones estructurales que consisten en identificar y denominar submetas dentro del procedimiento, usar ejemplos incompletos

para favorecer la anticipación del resultado y usar formatos integrados que eviten la dispersión de la atención.

- Entrenamiento directo y

- Uso de incentivos sociales para que el alumno supere su modo pasivo o superficial de procesar los ejemplos presentados. El método es *learning by teaching* (el alumno en el papel del que explica o maestro), enfoque dificultado por: su falta de experiencia en tutoría, su escaso conocimiento previo y porque puede resultarle abrumadora esta doble tarea de aprender y enseñar.

La función del docente

Podemos distinguir tres funciones del docente, sin importar el ámbito donde se desempeñe, aunque pueden verse condicionadas por el nivel (primario, medio o universitario) y el número de alumnos a cargo:

1º *Modelo*: su forma de actuar frente a los problemas imprime una marca en el alumno y esta influencia puede aprovecharse para transmitir formas de razonamiento y hábitos de estudio.

2º *Proveedor y conductor*: debe programar el aprendizaje tanto de los contenidos matemáticos como de los procedimientos para que el mismo sea integrado y sin repeticiones inútiles, de modo que el alumno pueda contar con recursos variados para optimizar el aprendizaje. Esto no implica falta de flexibilidad ante las características e intereses del alumno,

sino la planificación previa que permita alcanzar eficazmente los objetivos.

3º *Regulador externo*: privilegiar sus acciones y responsabilidad en el aprendizaje con respecto a las del alumno, intervenir cuando se manifiesten errores, inseguridades, o retirarse cada vez que el alumno muestre iniciativa espontánea, capacidad de elección, etc. (Pellerey, 1990).

Como señalamos, nuestro objetivo es analizar elementos que faciliten al alumno la tarea de aprender; nos hemos detenido en la reflexión tanto de los propios procesos cognoscitivos (*metacognición*) como de problemas ya resueltos (*worked-out examples*). Las investigaciones muestran las posibilidades e intentos de aplicar estos recursos a la enseñanza, pero para dotar al alumno de elementos útiles que él pueda utilizar en cualquier situación problemática, se requiere una tarea didáctica a desarrollar a lo largo del año escolar y bajo distintas circunstancias y con distintos contenidos. Al respecto podemos considerar los trabajos de Kramarski y otros (Kramarski, Mevarech y Lieberman, 2001) quienes comprobaron que los alumnos a quienes se los entrenó metacognitivamente en Matemática y en Lengua simultáneamente, alcanzaron mejores resultados que aquellos que sólo lo hicieron en una sola asignatura, ya que el alumno puede generalizar el uso de procesos metacognitivos más allá de un dominio específico.

En una encuesta, 60 alumnos que cursan el 9º año de la EGB (media de 14 años) en un colegio industrial del Gran Buenos Aires manifestaron que los elementos que mejorarían su rendimiento en el colegio son, en primera instancia, el estudio, la atención y la práctica. A éstos le siguen en importancia la ayuda exterior y la buena conducta; y, por último, la eliminación de factores afectivos como la vergüenza de equivocarse y la angustia de fracasar. Que el estudio sea la primera opción muestra que los alumnos son conscientes de que podrían mejorar sus notas si se lo propusieran y esto, según ellos, se logra principalmente prestando atención, concentrándose en la tarea y practicando (haciendo ejercicios nuevos o rechazando los ya hechos pero sin mirar el procedimiento).

En consecuencia, le cabe al docente la tarea de ayudar a estudiar, dándole al alumno los recursos para que pueda lograrlo por sí mismo. Si bien la enseñanza de las estrategias no garantiza su uso, ni aquellas el éxito en la tarea cuando sí se las emplea, es necesario que el alumno cuente con los recursos necesarios y, en este sentido, el ejercicio inducido de la reflexión puede capacitarlo para afrontar las situaciones de aprendizaje y para adquirir una habilidad metacognitiva que le permita tener conciencia de: los principios subyacentes, la anticipación del próximo paso de la solución, la comprensión del problema y del fracaso.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anthony, G. (1994). Learning Strategies in the Mathematics Classroom: What can we learn from stimulated recall interviews? *New Zealand Journal of Educational Studies*, 29(2), 127-140.
- Atkinson, R., Sharon, J., Renkl, A. y Wortham, D. (2000). Learning from examples: instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research*, 70(2), 181-214.
- Boekaerts, M. (1999). Metacognitive experiences and motivational state as aspects of self-awareness: review and discussion. *European Journal of Psychology of Education*, 14(4), 571-584.
- Cardelle-Elawar, M. (1992). Effects of teaching metacognitive skills to students with low mathematics ability. *Teaching and Teacher Education*, 8(2), 109-121.
- Chi, M., Bassok, M., Lewis, M.; Reimann, P. y Glaser, R. (1989). Self-explanations : How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, 13, 145-182.
- Flavell, J. (1978). Metacognitive development. En J. Scandura y C. Brainerd (Eds). *Structural Process Theories of Complex Human Behavior* (213-245). The Netherlands: Sijtoff & Noordhof.
- Gargallo Lopez, B. y Puig Moratal, J. (1997). Aprendiendo a aprender. Un programa de enseñanza de estrategias de aprendizaje en educación permanente de adultos. *Revista Española de Pedagogía*, 44(206), 113-136.
- Georghiades, P. (2000). Beyond conceptual change learning in science education: focusing on transfer, durability and metacognition. *Educational Research*, 42(2), 119-139.
- King, A. (1991). Effects of training in strategic questioning on children's problem-solving performance, *Journal of Educational Psychology*, 83(3), 307-317.
- Kramarski, B. y Mevarech, Z. (1997). Cognitive-metacognitive training within a problem-solving based Logo environment. *British Journal of Educational Psychology*, 67(4), 425-445.
- Kramarski, B., Mevarech, Z. y Lieberman, A. (2001). Effects of multilevel versus unilevel metacognitive training on mathematical reasoning. *The Journal of Educational Research*, 94(5), 292-300.

- Lochhead, J. (1985). Teaching analytic reasoning skills through pair problem solving. En W. Segal, S. Chipman y R. Glaser (Eds.). *Thinking and learning skills. Vol I: Relation instruction to research* (109-131). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mevarech, Z. (1999). Effects of metacognitive training embedded in cooperative settings on mathematical problem solving. *The Journal of Educational Research*, 92(4), 195-205.
- Mevarech, Z. y Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classroom, *American Educational Research Journal*, 34(2), 365-395.
- Movshovitz-Hadar, N. y Hadas, R. (1991). More about mathematical paradoxes in preservice teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 7(1), 79-92.
- Pellerey, M. (1990). Controllo e autocontrollo nell'apprendimento scolastico: Il gioco tra regolazione interna ed esterna, *Orientamenti Pedagogici*, 219(3), 473-491.
- Renkl, A. (1999). Learning mathematics from worked-out examples: analyzing and fostering self-explanations, *European Journal of Psychology of Education*, 14(4), 477-488.
- Repetto Talavera, E. (1997). Entrenamiento metacognitivo y ganancias significativas de los alumnos en algunas variables cognitivas y pedagógicas. Un estudio en la educación primaria y secundaria obligatoria (6º, 7º y 8º EGB) de Andalucía, Cantabria y Galicia. *Revista Española de Pedagogía*, 44(206), 5-32.
- Swanson, H. (1990). Influence of Metacognitive Knowledge and Aptitude on Problem Solving, *Journal of Educational Psychology*, 82(2), 306-314.
- Vázquez, S. (1996). Metacognition and reflection, *Studie di Psicologia dell'educacion*, 15(1-2), 116-124.
- Vermunt, J (1999). Process-oriented instruction in learning and thinking strategies. *European Journal of Psychology of Education*, 10(4), 325-349.

REFLECTION AND MATHEMATICAL LEARNING

The role of reflection as a learning facilitator is analyzed, which may relate to both cognitive processes (metacognition) and previously solved problems (worked-out examples). Research shows its possibilities, as well as some attempts to use it as an instructional resource.

Key words: reflection - metacognition - mathematics learning - learning strategies.

Datos y dirección del autor: Profesora de matemática egresada de la Univ. de Buenos Aires. En la actualidad, es investigadora adjunta del Conicet y se especializa en metodología de la enseñanza de la matemática.

CIAFIC (Centro de Investigaciones en Antropología Filosófica y Cultural)
-Federico Lacroze 2100 – 1426 Buenos Aires. Tel.: (54) (011) 47760913-
Email: virginiaarapetti@hotmail.com

